

Conteos en Arreglos de Hiperplanos, Números de Catalan y Funciones de Parqueo

Universidad Nacional de Colombia
Emerson Julián León Guerrero

Junio de 2006

Resumen

Se presentan aquí algunos temas básicos en arreglos de hiperplanos. Se muestran algunos de los arreglos de *Coxeter*, en particular el arreglo de *permutaciones*, de *Catalan* y de *Shi*. Se intenta profundizar en sus propiedades y conexiones con otros objetos combinatorios. Las diferentes demostraciones se exponen desde un punto de vista biyectivo, aunque al final se exponen otros resultados importantes en el tema, que hacen contraste con las demostraciones iniciales y muestran otras posibilidades en el estudio de estos temas de combinatoria.

1. Introducción

En este trabajo se exponen los arreglos de hiperplanos, sus principales propiedades y su relación con otros objetos combinatorios. En particular se estudian algunos de los más sencillos ejemplos, como el arreglo de permutaciones, de Catalan y de Shi, que pertenecen a un grupo de arreglos conocidos como arreglos de Coxeter. En este estudio, se muestran muchas de las propiedades más importantes de los arreglos y las diferentes relaciones que tienen con otros objetos. Además, se intenta ahondar en estas relaciones, obteniendo de esta forma interesantes demostraciones de algunos resultados.

Entre los resultados obtenidos se encuentra una demostración de la invarianza en la paridad al factorizar una permutación como producto de transposiciones en el grupo simétrico S_n , el conteo biyectivo del número de regiones acotadas en el arreglo de Catalan y la relación del número de regiones del arreglo de Shi correspondientes a cada permutación con el conjunto de ideales de un poset (conjunto parcialmente ordenado).

El estudio y las demostraciones de todos estos resultados se realizan de forma biyectiva, tratando de usar argumentos simples y la menor cantidad de teoría posible. Por medio de estas biyecciones, se intenta buscar las similitudes y analogías entre los distintos objetos, para así mejorar el conocimiento que se tiene de todos ellos. En la actualidad se conocen muchas otras formas de atacar este tipo de problemas de conteo, como por ejemplo, mediante el uso de funciones generatrices y el estudio del polinomio característico del arreglo.

Estos métodos tan elegantes y sofisticados permiten resolver los problemas de forma más mecánica. Sin embargo, las demostraciones biyectivas aún siguen siendo apreciadas por la

gran cantidad de sutilezas y detalles que pueden obtenerse en estas relaciones, la simplicidad de las herramientas y la complejidad y belleza de las ideas involucradas.

En contraste con el enfoque biyectivo, en la sección final se muestran otros resultados y teoremas en arreglos de hiperplanos, relacionados principalmente con el estudio del polinomio característico, obteniendo por esta vía demostraciones alternativas de algunos de los teoremas expuestos y conexiones con muchos otros temas. Esto con el fin de mostrar la diversidad de resultados en este campo y la belleza detrás del estudio de estos objetos.

2. Preliminares

A continuación se expondrá brevemente qué son los arreglos de hiperplanos, algunas definiciones importantes y la idea general del tipo de problemas que se intenta explicar.

Definición 2.1. Un *arreglo de hiperplanos* \mathcal{A} en \mathbb{R}^n es una colección finita de hiperplanos lineales de la forma

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i \cdot x = r_i\},$$

con $v_i \in \mathbb{R}^n$ y $r_i \in \mathbb{R}$, para i entre 1 y m , donde m es el número de hiperplanos del arreglo. $v \cdot x$ indica el producto interior usual en \mathbb{R}^n .

Cada uno de estos hiperplanos divide en dos regiones al espacio \mathbb{R}^n , así que al tomar el arreglo completo, se divide el espacio \mathbb{R}^n en cierta cantidad de *regiones*, que son las componentes conexas de $\mathbb{R}^n - \cup H_i$.

Definición 2.2. La *dimensión* de un arreglo \mathcal{A} en \mathbb{R}^n es por definición n y se denota $\dim(\mathcal{A})$. El *rango* de \mathcal{A} es la dimensión del espacio $V_{\mathcal{A}}$ generado por los vectores v_i normales a cada uno de los hiperplanos y se denota $\text{Rank}(\mathcal{A})$.

Definición 2.3. Una región es *relativamente acotada* si la intersección del espacio $V_{\mathcal{A}}$ con la región es un conjunto acotado.

La intersección del arreglo con el espacio $V_{\mathcal{A}}$ es conocida como la esencialización del arreglo. Mediante cambios en la dirección de un vector $v \in V_{\mathcal{A}}^{\perp}$, no es posible cambiar de región, pues todos los hiperplanos van paralelos a v . Por tal razón podría pensarse que al intersectar el arreglo \mathcal{A} con $V_{\mathcal{A}}$ se conserva toda la información, y el arreglo así obtenido es similar a \mathcal{A} , visto en $\text{Rank}(\mathcal{A})$ dimensiones. Se observa que si $\text{Rank}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A})$, entonces ser acotado y relativamente acotado es equivalente, pues en tal caso $V_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^n$.

Definición 2.4. Se dirá que dos regiones de \mathcal{A} son *adyacentes* si solamente se interpone un hiperplano del arreglo entre ellas.

En el estudio de arreglos de hiperplanos, una de las preguntas más importantes es acerca del número de regiones generadas por \mathcal{A} . Además, se desea encontrar algunas propiedades en la distribución de las mismas y relaciones con otros objetos.

Al estar en n dimensiones, es difícil visualizar la forma en que los hiperplanos se cruzan, y la pregunta acerca del número de regiones puede ser muy complicada en general. Por tal razón, en muchos casos se prefiere dar cierto tipo de interpretación combinatoria a las regiones, con el fin de visualizar mejor las propiedades de lo que ocurre en \mathbb{R}^n , por medio de analogías.

3. Arreglo de Permutaciones

Como un primer ejemplo de arreglo de hiperplanos, se mostrará el arreglo de permutaciones en \mathbb{R}^n . Su estudio facilitará el entendimiento de los otros arreglos de hiperplanos y del tipo de argumentos involucrados, pues ahí se observan claramente las diferentes ideas del uso de analogías con otros objetos combinatorios.

Definición 3.1. El *arreglo de permutaciones* (también conocido como *Braid arrangement*), denotado por \mathcal{B}_n , es un arreglo en n dimensiones, formado por todos los planos H_{ij} de la forma $x_i - x_j = 0$, para $1 \leq i < j \leq n$.

Se observa que todos los puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ por fuera de todos los hiperplanos de \mathcal{B}_n no pueden tener dos coordenadas iguales. Además dos puntos x y x' están en la misma región si ningún hiperplano se interpone entre ellos. Si x y x' están del mismo lado de H_{ij} entonces $x_i > x_j$ siempre que $x'_i > x'_j$. Por lo tanto, se encuentra que dos puntos pertenecen a la misma región si y sólo si tienen todas sus coordenadas en el mismo orden.

Por esto, es natural representar cada región del arreglo de permutaciones con un elemento del grupo simétrico S_n (el grupo de permutaciones con n elementos). Para esto, se definirá una función ν que relaciona cada elemento $\omega \in S_n$ con una región del arreglo de permutaciones de la siguiente forma:

$$\nu(\omega) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_{\omega(1)} > x_{\omega(2)} > \dots > x_{\omega(n)}\}.$$

Se encuentra fácilmente que la función ν definida anteriormente es una biyección entre S_n y las regiones del arreglo de permutaciones. Como consecuencia, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *El número de regiones del arreglo de permutaciones es $n!$.*

Además, la biyección anterior ayuda a establecer una gran cantidad de propiedades sobre las regiones. Por ejemplo, se encuentra que dos regiones son adyacentes, si al observar las permutaciones asociadas ω y ω' , se cumple que $\omega' = \tau \circ \omega$, donde τ es una transposición de dos términos consecutivos $\omega(k)$ y $\omega(k+1)$.

Un conocido hecho de la teoría de grupos dice que toda permutación puede ser escrita como una composición de transposiciones, y además se cumple que:

Teorema 3.2. *La paridad del número de transposiciones que se utilizan en cualquier factorización de una permutación ω es siempre la misma, para cada $\omega \in S_n$.*

Con este resultado, es posible clasificar las permutaciones en pares e impares (esto es conocido como el signo de la permutación). También se demuestra que el conjunto formado por todas las permutaciones pares forma un subgrupo de S_n , conocido como el *grupo alternado* A_n . Aplicando este resultado al arreglo de permutaciones, se demuestra que es posible colorear las regiones del arreglo de permutaciones en dos colores, de forma que cada par de regiones adyacentes tengan siempre distinto color (como en un tablero de ajedrez). Esto se logra coloreando de blanco las regiones asociadas a elementos de A_n y de negro todas las demás.

En realidad, este resultado no es nada sorprendente en el estudio de arreglo de hiperplanos, y en cambio, las observaciones en el arreglo de permutaciones ayudan a visualizar una demostración del teorema 3.2. Esto es consecuencia del siguiente hecho, que es bastante sencillo.

Proposición 3.3. *En todo arreglo de hiperplanos, es posible colorear cada región de blanco o negro, de forma que todo par de regiones adyacentes tengan colores distintos.*

Demostración. Se hará por inducción en el número de hiperplanos. El resultado es obvio para los primeros casos. Suponiendo que la afirmación es cierta para todo arreglo con k hiperplanos, al tomar un arreglo con $k + 1$ y quitarle uno de ellos, queda un arreglo con k hiperplanos, que por hipótesis puede ser coloreado de la forma indicada. Al trazar de nuevo el hiperplano que se quitó, es posible lograr la coloración deseada cambiando el color de cada una de las regiones que quedan de un lado y dejando igual los colores del otro lado.

De esta forma, si las regiones están separadas tan solo por el hiperplano que se quitó, sólo una de ellas cambió de color con respecto a la coloración anterior. Como allí ambas eran parte de la misma región, tenían antes el mismo color y por lo tanto, en la configuración final quedan de diferente color. Si un par de regiones adyacentes queda separada por un hiperplano distinto al que se quitó, entonces ambas regiones quedan del mismo lado de este último, por lo que ambas cambiaron de color o ambas permanecieron igual. Como al quitar el hiperplano las regiones siguen siendo adyacentes, debían tener inicialmente colores distintos, e igual debe ocurrir en la configuración final. \square

Para completar la demostración del teorema 3.2, basta notar que aplicar una transposición cualquiera a una permutación en S_n es equivalente a una reflexión de la región correspondiente a la permutación sobre uno de los hiperplanos, precisamente el hiperplano que envía la región “identidad” sobre la región que representa la transposición deseada. Dado que las regiones se pueden colorear de blanco y negro como se indica en la proposición 3.3, se observa que las reflexiones de regiones adyacentes cambian el color de la región.

En general se encuentra que las reflexiones siempre cambian el color de las regiones, pues el arreglo es completamente simétrico, con respecto a cada uno de los hiperplanos. Como la forma de colorear es única una vez se escoge el color de una de las regiones, los colores simétricos resultan siendo siempre opuestos, pues así ocurre en las regiones adyacentes que limiten sobre el hiperplano.

Viendo que toda factorización de una permutación como producto de transposiciones puede entenderse como una secuencia de reflexiones a partir de la región identidad hasta la permutación final, se encuentra que para cada permutación, todas las posibles formas de factorizarla tienen siempre la misma paridad, ya que en cada reflexión siempre se cambia de color. Se encuentra así que las regiones con el mismo color de la región identidad corresponden a las permutaciones pares, mientras que las regiones restantes estarían asociadas a las permutaciones impares.

El análisis anterior muestra la gran versatilidad que tienen las biyecciones entre objetos de naturaleza tan distinta y algunas posibilidades en el análisis de arreglos de hiperplanos. La demostración anterior del teorema 3.2 no difiere demasiado de otras demostraciones relacionadas con el polinomio de *Vandermonde*, pues se encuentra que los ceros de este polinomio definen el arreglo de permutaciones. Adicionalmente, es posible obtener otra demostración del resultado 3.3 observando los polinomios que definen cada arreglo de hiperplanos.

El arreglo de permutaciones es uno de los ejemplos más sencillos de estudiar entre los arreglos de hiperplanos. Sin embargo, muchos de los más importantes arreglos son simples variaciones del arreglo de permutaciones. Las ideas y resultados expuestos anteriormente serán útiles en el estudio de estos otros arreglos.

4. Números y Arreglo de Catalan

Los *números de Catalan* aparecen naturalmente en muchos problemas de combinatoria, que aparentemente no tienen nada en común. En particular, permiten contar el número de regiones de un arreglo de hiperplanos muy cercano al arreglo de permutaciones conocido como el arreglo de Catalan.

Definición 4.1. Los números de Catalan se definen por la siguiente relación de recurrencia: $C_0 = 1$ y $C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \dots + C_nC_0$.

El siguiente resultado muestra una fórmula explícita de los números de Catalan.

Proposición 4.1. Para todo valor de n se cumple que $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.

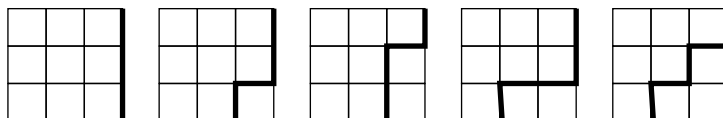
Se obtendrá una demostración de esta fórmula más adelante (ver teorema 6.3), aunque también es posible llegar a ella por medio de conteos sencillos. Algunas posibles interpretaciones de los números de Catalan están dadas por los diferentes objetos combinatorios que se muestran a continuación.

Teorema 4.2. Los números de Catalan C_n cuentan el número de elementos de los siguientes conjuntos para cada $n \in \mathbb{N}$. Se mostrará en cada caso el ejemplo para $n = 3$. Nótese que $C_3 = 5$.

(1) Secuencias de enteros positivos $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ tales que $a_i \leq i$ para todo i entre 1 y n .

1, 1, 1 1, 1, 2 1, 1, 3 1, 2, 2 1, 2, 3

(2) Caminos sobre una cuadrícula de $n \times n$ que unen la esquina inferior izquierda con la esquina superior derecha, sin pasar nunca por encima de la diagonal, con la mínima longitud posible ($2n$ pasos).



(3) Secuencias b_1, b_2, \dots, b_{2n} donde cada b_i es 1 o -1 , tales que todas las sumas parciales $b_1 + b_2 + \dots + b_k$ (para k entre 1 y $2n$) son no negativas y la suma total es 0.

1, 1, 1, -1 , -1 , -1 1, 1, -1 , -1 , 1, -1 1, -1 , 1, -1 , 1, -1
 1, 1, -1 , 1, -1 , -1 1, -1 , 1, 1, -1 , -1

Demostración. Las demostraciones de estos resultados se pueden obtener fácilmente por inducción, mostrando que el número de estos objetos cumple la relación de recurrencia que define los C_n . Además, algunos de estos conjuntos están relacionados y es posible hacer biyecciones entre ellos, facilitando así su conteo.

Por ejemplo, es fácil lograr una biyección entre (1) y (2) viendo que cada camino de (2) pasa por encima de algunas casillas del tablero. Si c_i es el número de cuadros que se encuentran por debajo del camino en la columna i , defina $a_i = 1 + c_i$. La lista a_1, a_2, \dots, a_n

así obtenida resulta ser una secuencia como las de (1). De esta forma se obtiene una biyección entre los caminos y las listas, pues cada lista en (1) está asociada a un único camino.

Igualmente, es posible relacionar los elementos en (2) y (3), tomando cada camino de principio a fin y escribiendo en ese orden un 1 por cada paso a la derecha y un -1 por cada paso hacia arriba. Es fácil verificar que esta lista cumple las condiciones en (3) y que la relación descrita anteriormente también forma una biyección. Con esto se demuestra que el número de elementos en (1), (2) y (3) es siempre igual.

Para ver que en todos estos casos la cantidad de elementos es justamente C_n , se demostrará que la cantidad de elementos en (2) cumple la relación de recurrencia que define a los números de Catalan. Suponiendo que el número de caminos en (2) es a_i para todo i entre 1 y n , se encontrará cuántos posibles caminos hay para $n + 1$. Se realizará este conteo por casos, dependiendo de la primera vez que el camino toca la diagonal (suponiendo que el camino va desde $(0, 0)$ hasta $(n + 1, n + 1)$ en el plano cartesiano).

Si la primera vez que el camino toca la diagonal es en el punto $(k + 1, k + 1)$, entonces el número de formas de hacer la primera parte del camino es a_k (pues al no tocar la diagonal se forma un camino entre $(1, 0)$ y $(k + 1, k)$ similar a los de (2) para $n = k$); para el resto del camino hay a_{n-k} posibilidades. Reuniendo todos los casos, se encuentra que la cantidad de posibles caminos desde $(0, 0)$ hasta $(n + 1, n + 1)$ pasando siempre bajo la diagonal es

$$a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0.$$

Si el valor anterior se denota por a_{n+1} , se observa que la secuencia de los a_i cumple la misma relación de recurrencia de los números de Catalan. Observando los primeros casos, se concluye que $a_i = C_i$ para todo i . \square

Estas biyecciones no sólo permiten relacionar el número de elementos de cada uno de estos conjuntos. Gracias a ellas, también es posible observar relaciones en la estructura de los diferentes objetos, facilitando así la visualización de nuevas propiedades.

Existe una gran cantidad adicional de objetos combinatorios relacionados con los números de Catalan. En [4] puede encontrarse una lista con cientos de ellos. A continuación se muestran otros ejemplos:

- (4) Árboles planos con raíz de $n + 1$ vértices.
- (5) Productos no asociativos de $n + 1$ variables (es decir, formas de asociar un producto de $n + 1$ variables).
- (6) Formas de dividir en triángulos un polígono de $n + 2$ lados por medio de $n - 1$ diagonales.
- (7) Secuencias de enteros $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, con $0 \leq a_i \leq n$ para i entre 1 y n , tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ es divisible por $n + 1$.

Estas demostraciones pueden hacerse de forma similar, pero no se mostrarán acá. En algunos casos, las relaciones con los objetos anteriores no son tan directas y es necesario usar nuevas ideas. A continuación se presenta otro ejemplo en el cual aparecen los números de Catalan, relacionado con los arreglos de hiperplanos.

Definición 4.2. El arreglo de Catalan es un arreglo en \mathbb{R}^n formado por los hiperplanos

$$x_i - x_j = -1, 0 \text{ ó } 1,$$

con $1 \leq i < j \leq n$ (tiene en total $\frac{3n(n-1)}{2}$ hiperplanos). Este arreglo se denotará por C_n .

Teorema 4.3. *El número de regiones determinadas por el arreglo \mathcal{C}_n es $n!C_n$.*

Demostración. Para comenzar, se observa que el arreglo de Catalan contiene el arreglo de permutaciones, por lo que divide a \mathbb{R}^n en $n!$ sectores. Además, por la simetría del arreglo, todas estas regiones se encuentran divididas por los hiperplanos en la misma forma. Faltaría ver en cuántas regiones se encuentra dividida cada sección dada por el arreglo de permutaciones. Considerando una sola región $\nu(\omega)$, se encuentra que el orden de las coordenadas de los puntos es fijo. Es decir, cualquier punto (x_1, x_2, \dots, x_n) en la región cumple que

$$x_{\omega(1)} > x_{\omega(2)} > \dots > x_{\omega(n)}.$$

Para saber precisamente a qué región del arreglo de Catalan pertenece cada uno de estos puntos, tan solo es necesario aclarar de qué lado de los hiperplanos se encuentra el punto, diciendo en qué casos se cumple que $x_{\omega(i)} > x_{\omega(j)} + 1$. Esto quedaría resuelto definiendo $y_i = x_i + 1$ y haciendo una lista de los x_i y y_i , en el orden que se encuentran.

El número de formas distintas de ordenar estos números es justamente C_n . Para ver esto, nótese que lo único que debe cumplirse en la lista es que los x_i estén en un orden preciso, al igual que los y_i (el orden depende de ω) y que además, todos los y_i sean mayores que su correspondiente x_i . De esta forma, se tendría una lista ordenada con $2n$ términos. Por ejemplo, para el caso de $n = 3$, podría tenerse algo como

$$y_{\omega(1)} > y_{\omega(2)} > x_{\omega(1)} > y_{\omega(3)} > x_{\omega(2)} > x_{\omega(3)}.$$

Todas estas listas definen completamente una región en el arreglo. Si ahora se intercambia cada y_i por un 1 y cada x_i por un -1 , se obtiene una lista como en (3), por lo que se logra una biyección con los números de Catalan (se comprueba fácilmente que cada una de estas listas de 1's y -1 's también representan a su vez una única forma de ordenar).

Se concluye que el sector $\nu(\omega)$ queda dividido en C_n regiones. Como este razonamiento es válido para toda permutación ω , se demuestra entonces que el número de regiones es justamente $n!C_n$. \square

4.1. Regiones Acotadas en el Arreglo de Catalan

Se puede observar que $\text{Rank}(\mathcal{C}_n) = n - 1$, ya que el vector $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ veces}})$ es perpendicular a todas las normales (es decir, es paralelo a todos los hiperplanos). Por tal razón, no tiene regiones acotadas en \mathbb{R}^n . Sin embargo, se llamarán regiones *acotadas* a las regiones relativamente acotadas de este arreglo. Un resultado interesante acerca de las regiones acotadas en el arreglo de Catalan es el siguiente:

Teorema 4.4. *El número de regiones acotadas en el arreglo \mathcal{C}_n es exactamente $n!C_{n-1}$.*

Demostración. Se presenta aquí una demostración biyectiva de este hecho. La idea es de nuevo observar directamente la relación entre las regiones del arreglo de Catalan y los objetos definidos en el teorema 4.2. De nuevo, por la simetría del arreglo se observa que el número de regiones acotadas es $n!$ por la cantidad de regiones acotadas que hay en cada uno de los sectores del arreglo de permutaciones $\nu(\omega)$. Para mayor simplicidad, se considerará (sin perder generalidad) el sector que se obtiene cuando ω es la permutación identidad.

Se observa que si las regiones no son acotadas, deben extenderse indefinidamente en algunas direcciones, por ser polítopos convexos. Las posibles direcciones de fuga deben ser vectores de la forma $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ con $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, pues en otros casos, los rayos de la forma $x + \alpha v$ (con x un punto en el interior de la región y $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$) se saldrían en algún momento del sector que se está considerando, el cual es un cono convexo limitado por los hiperplanos $x_i = x_{i+1}$ para i entre 1 y $n - 1$. Si $a_1 = a_n$, el vector v resulta paralelo a los hiperplanos, por lo que es proyectado en el vector 0 de V_{C_n} . Este caso no interesa en el estudio de regiones relativamente acotadas.

Para las otras direcciones de vectores v , si los rayos de la forma $x + \alpha v$ están totalmente contenidos en la misma región para cierto valor de x , se encuentra que la región no es acotada. Por lo tanto, una región acotada debe ser tal que para todo vector v de la forma anteriormente mencionada, los puntos de la forma $x + \alpha v$ no estén todos en la misma región. En particular, tomando vectores $v_k = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k \text{ veces}}, 0, 0, \dots, 0)$ para k entre 1 y $n - 1$, los puntos de la forma $x + \alpha v_k$ en algún momento dejarán de estar en la región. De aquí se concluye que si la región es acotada, se cumple que

$$y_{k+1} = x_{k+1} + 1 > x_k,$$

para todos los valores de k entre 1 y $n - 1$, pues de lo contrario, al sumar los vectores αv_k se conservarían las distintas relaciones de orden que definen la región y todo el rayo quedaría contenido. Además, es suficiente verificar que la relación anterior siempre se cumple para asegurar que la región es acotada, pues toda otra posible dirección de fuga v con $a_1 \neq a_n$ modificará las desigualdades cada vez que $a_k \neq a_k + 1$ de la misma forma que v_k (puede verse a v como una combinación lineal de los v_i , donde cada término modifica las desigualdades por separado).

Viendo ahora la lista de (3) relacionada con una región acotada, se encuentra que ésta debe ser tal que todas las sumas parciales sean positivas excepto la última, pues si alguna otra suma es 0, querría decir que hasta cierto punto la cantidad de 1's y -1's es igual, por lo que los primeros números de la lista corresponden a los valores y_i desde y_1 hasta y_k , junto con sus respectivos x_i . En este caso se cumple que $x_k > y_{k+1}$, impidiendo de esta forma que la región sea acotada.

Se sigue que el número de regiones acotadas en este sector es justamente C_{n-1} , pues si de la lista se quitan el primer y último término (que necesariamente son un 1 y un -1, respectivamente), queda una lista tal que las sumas parciales son siempre no negativas, es decir, una de las listas de (3), para el caso de $n - 1$. \square

Se observa cómo se utilizaron las distintas biyecciones para encontrar nuevas propiedades y relacionar adecuadamente los diferentes objetos involucrados. Una prueba alternativa del teorema anterior se deduce del teorema 6.3.

5. Funciones de Parqueo y Arreglo de Shi

En esta sección se muestra el arreglo de Shi y su relación con ciertas listas de números conocidas como funciones de parqueo. Se estudian algunas de sus propiedades, mediante el uso biyecciones e ideas similares a las utilizadas en el capítulo anterior. Además, se mencionan algunos resultados relacionados, incluyendo algunos relativos al arreglo de Linial, que es otro

arreglo cercano a los que se han mencionado. Se mostrará inicialmente qué son las funciones de parqueo y su relación con los números de Catalan.

5.1. Funciones de Parqueo

En un parqueadero se tienen n espacios de estacionamiento ubicados en línea, numerados en orden de 1 a n , donde el espacio número 1 es el más cercano a la puerta de entrada del parqueadero, y el número n se encuentra llegando a la salida. Un grupo de n autos se dispone a entrar al parqueadero. Para esto, cada uno de los autos escoge el número del estacionamiento que desea utilizar (esto es una función de los autos en los espacios de parqueo). Es posible que varios autos elijan el mismo espacio.

Una vez llegan los autos en orden, cada uno de ellos se dirige al sitio que escogió. Si el espacio está vacío, el auto se estaciona en ese lugar, pero en caso contrario, el auto seguirá andando y se ubicará en el primer lugar vacío que encuentre. Si ninguno de los lugares siguientes está libre, el auto no podrá estacionarse. Es posible representar todas las elecciones de los autos mediante una lista de números (a_1, a_2, \dots, a_n) , donde el auto i escoge el lugar a_i .

Definición 5.1. Una *función de parqueo* de longitud n es una lista (a_1, a_2, \dots, a_n) de elecciones, para la cual todos los autos se pueden estacionar. El conjunto de todas las funciones de parqueo de longitud n se denotará por \mathcal{P}_n .

Ejemplo 5.1. Se observa para $n = 4$, que la lista $(2, 1, 4, 1)$ es una función de parqueo. En tal caso, todos los autos se estacionan en el lugar que eligieron, excepto el último auto, que debe estacionar en la tercera posición. Por otro lado, la lista $(3, 1, 4, 3)$ no es una función de parqueo, pues el último auto no podrá parquear.

Las funciones de parqueo están en estrecha relación con los números de Catalan. Esto es consecuencia de la siguiente afirmación.

Proposición 5.1. *Los elementos de \mathcal{P}_n son los reordenamientos de las listas en (1), correspondientes a números de Catalan.*

En efecto, sea (a_1, a_2, \dots, a_n) una función de parqueo. Si se reordenan los a_i en una lista b_1, b_2, \dots, b_n como $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, entonces $b_i \leq i$ para todo i , ya que de lo contrario todos los autos b_j para $j \geq i$ (que son en total $n + 1 - i$ autos) buscarían ocupar las $n - i$ posiciones finales, y al menos uno de ellos no podrá parquear.

Es fácil ver que la condición anterior también es suficiente. Si al ordenar una lista (a_1, a_2, \dots, a_n) se cumple que $b_i \leq i$, entonces para cada posición i hay al menos i autos que eligen una posición $b_j \leq i$ y uno de ellos tendrá que estacionarse en la posición i . Como esto es válido para todo i , todos los estacionamientos quedarán ocupados, por lo que la lista sería una función de parqueo.

Con esto, es posible caracterizar todos los elementos de \mathcal{P}_n como listas de n números entre 1 y n tales que hay al menos un 1, al menos dos números menores o iguales a 2, y en general, por lo menos k números menores o iguales a k , para cada k entre 1 y n . Se tienen además el siguiente resultado, que cuenta el número de elementos de \mathcal{P}_n .

Teorema 5.2 (Konheim-Weiss, 1966). *Existen en total $(n + 1)^{n-1}$ funciones de parqueo de longitud n .*

Demostración. Para demostrar este teorema, suponga que se agrega un nuevo estacionamiento $n + 1$ y que el parqueadero ahora está dispuesto de forma circular (es decir, si un auto llega al último espacio y éste se encuentra ocupado, el auto puede seguir hasta llegar al primer estacionamiento). Se encuentra ahora que todos los autos podrán estacionar, sin importar cómo elijan sus lugares y quedará un lugar libre. Si el lugar $n + 1$ también puede ser elegido, se forman entonces $(n + 1)^n$ funciones de elección. Se quiere averiguar cuántas de éstas son efectivamente funciones de parqueo. Para esto, se observa que una elección es una función de parqueo si y sólo si el estacionamiento que no se utilizó está en la posición $n + 1$.

Las posibles elecciones pueden rotarse en la configuración, haciendo que cada uno de los autos elija la posición que se encuentra k puestos después (módulo $n + 1$). De esta forma el espacio libre estará también k puestos después. Es posible agrupar las elecciones de los autos en grupos de $n + 1$, que son rotaciones unas de otras. En cada uno de estos grupos, exactamente una de las funciones tendrá el espacio libre en la posición $n + 1$, pues la elección de los autos se puede rotar de manera única para que ocurra esto.

Se concluye que el número de funciones de parqueo se obtiene dividiendo por $n + 1$ el número de funciones de elección, para encontrar un total de $(n + 1)^{n-1}$ funciones de parqueo de longitud n . \square

Esta prueba es debida a Pollack (1974). Aunque puede parecer un poco artificial, su simplicidad y elegancia hacen que sea apreciada. Conociendo el resultado del conteo, que por cierto es bastante simple, es posible encajar las cuentas y diseñar una demostración de este tipo, pero seguramente fue necesario resolver el problema primero por otros métodos antes de lograr una solución tan sencilla. Mediante la relación entre las funciones de parqueo y los números de Catalan, en particular con las listas de números de (1) y (7), es posible completar otra demostración biyectiva del resultado anterior, aunque ésta sería igualmente artificial. Un ejercicio interesante para el lector es construir una biyección entre los conjuntos definidos en (1) y (7), usando una idea similar a la anterior.

Existen otros métodos más comunes para atacar este tipo de conteos, como el uso de recurrencias, funciones generatrices y manejos algebraicos, pero las demostraciones se vuelven mucho más teóricas y menos ilustrativas. También es posible lograr este conteo por medio de los arreglos de hiperplanos, gracias a su cercana relación con las regiones del *Arreglo de Shi*.

5.2. Arreglo de Shi

Junto con el arreglo de permutaciones y el de Catalan, el arreglo de Shi es uno de los más estudiados entre los arreglos de hiperplanos.

Definición 5.2. El arreglo de Shi en \mathbb{R}^n está formado por los hiperplanos de la forma

$$x_i - x_j = 0 \text{ ó } 1,$$

para $1 \leq i < j \leq n$ y se denota como \mathcal{S}_n .

La relación del arreglo de Shi con las funciones de parqueo puede verse claramente en el siguiente teorema, cuya demostración puede hacerse en forma biyectiva.

Teorema 5.3 (Shi, 1986). *El número de regiones en el arreglo \mathcal{S}_n es $(n + 1)^{n-1}$.*

Demostración. Se asignará una función de parqueo a cada una de las regiones del arreglo, mediante una función λ . Para definir esta función, se llamará R_0 a la región base, en la cual $x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_1 + 1$ y se definirá la distancia entre dos regiones como el número de hiperplanos del arreglo que se interponen entre ellas. Se construye paso a paso la función λ , de forma que:

- I) $\lambda(R_0) = (1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{P}_n$.
- II) Si dos regiones R y R' están separadas únicamente por un hiperplano de la forma $x_i - x_j = 0$ (con $i < j$) y R se encuentra a menor distancia de R_0 que R' , entonces $\lambda(R') = \lambda(R) + e_i$ (donde e_i es el vector con sólo un 1 en la i -ésima coordenada).
- III) Si dos regiones R y R' están separadas únicamente por un hiperplano de la forma $x_i - x_j = 1$ y R se encuentra a menor distancia de R_0 que R' , entonces $\lambda(R') = \lambda(R) + e_j$.

La función λ resulta bien definida, pues gracias a la proposición 3.3, dos regiones adyacentes no pueden estar a igual distancia de R_0 , ya que una debe estar a distancia par mientras que la otra está a distancia impar. Además, los 1's que se sumaron en cada región R dependen únicamente de los hiperplanos que se encuentran entre R_0 y R (con esto se muestra que la distancia a R_0 es la suma de los números en $\lambda(R)$ menos n). Esta función λ resulta ser la biyección deseada.

Para ver que todos los valores así asignados corresponden a funciones de parqueo, nótese que si la región R está contenida en el sector $\nu(\omega)$, se cumple que si $\lambda(R) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, entonces $x_{\omega(1)} > x_{\omega(2)} > \dots > x_{\omega(n)}$. Por lo tanto $a_{\omega(k)} \leq k$, ya que por la forma en que se definió λ , sólo se le sumará al término $a_i = a_{\omega(k)}$ por cada x_j con $i < j$ tal que $x_j > x_i$, y por algunos de los valores de x_j con $j < i$ tales que $x_j > x_i + 1 > x_i$, con lo que $a_{\omega(k)}$ a lo sumo será k , sumando 1 por cada $x_j > x_i$. Para ver que λ toma todos los posibles valores de las funciones de parqueo, es posible mostrar un algoritmo para el cálculo de λ^{-1} , aunque no es tan sencillo. \square

Ejemplo 5.2. En la figura 1 se muestra la gráfica del arreglo de Shi para $n = 3$, junto con los valores de la función λ . Como $\text{Rank}(\mathcal{S}_3) = 2$ ya que sus hiperplanos son paralelos a los arreglos anteriores, es posible graficar a \mathcal{S}_3 en el plano, mostrando lo que ocurre en $V_{\mathcal{S}_3}$. Se marcó el punto que representa al origen.

La construcción de esta función λ es debida a *I. Pak*, y puede ser extendida a las k -funciones de parqueo, que están relacionadas con otros arreglos de hiperplanos que generalizan al arreglo de Shi (conocidos como \mathcal{S}_n^k o *arreglos de k -Shi*). No se entrará en detalle al respecto, pero la demostración de la biyección de Pak y su generalización en arreglos de k -Shi puede encontrarse en [6]. Las funciones de parqueo, aunque muy sencillas, guardan de algún modo toda la información contenida en el arreglo, aunque el hecho de que sea fácil pasar de las regiones a las funciones de parqueo, pero no al revés, hace que esta información quede de algún modo “oculta” mediante la biyección.

Estas interesantes relaciones entre objetos hacen pensar que hay una gran cantidad de estructura matemática oculta, y por tal motivo, posibilidades de trabajo en investigación en estos temas de combinatoria. Una muestra de los resultados obtenidos en este campo se encuentra a continuación. Las demostraciones no se dan aquí, aunque en lo posible se intentará indicar la idea para obtenerlas.

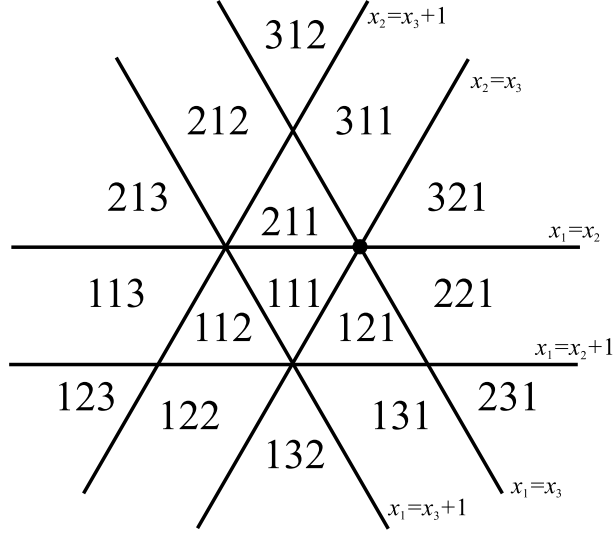


Figura 1: Arreglo de Shi y valores de λ , para $n = 3$.

Teorema 5.4. *El número de regiones relativamente acotadas del arreglo de Shi es exactamente $(n - 1)^{n-1}$*

Una demostración de este hecho se obtiene como consecuencia del teorema 6.4, aunque es posible obtener este resultado haciendo una analogía con lo ocurrido en la demostración del teorema 4.4 y usando funciones generatrices.

Teorema 5.5. *Las regiones en el arreglo de \mathcal{S}_n están en biyección con los árboles con vértices $0, 1, \dots, n$.*

El resultado anterior puede obtenerse como consecuencia de la relación de las funciones de parqueo y los números de Catalan, en particular con las listas dadas en (1) y los árboles en (4). Es posible lograr muchas otras demostraciones biyectivas. Una de ellas se encuentra en [1] y mediante ésta se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 5.6. (Kreweras) *El número regiones del arreglo de \mathcal{S}_n que se encuentran a una distancia k de R_0 es igual al número de árboles con vértices $0, 1, \dots, n$ con $\binom{n}{2} - k$ inversiones, donde una inversión es un par de vértices i, j con $1 \leq i \leq j \leq n$ tales que j se encuentra en el camino de i hasta 0 .*

Otro arreglo de hiperplanos interesante, relacionado con los distintos arreglos expuestos anteriormente, es el arreglo de Linial. Este consiste en los hiperplanos de la forma $x_i - x_j = 1$, para $i < j$. Se encuentra la relación de este arreglo con otro grupo de objetos, entre los cuales se destacan los árboles alternantes. Estos son árboles numerados, en los cuales todos los vértices tienen un número mayor al de todos sus vecinos, o menor que todos estos. Puede obtenerse la siguiente relación.

Teorema 5.7. *El número de regiones en el arreglo de Linial \mathcal{L}_n es igual al número de árboles alternantes con $n + 1$ vértices y está dado por la fórmula*

$$r(\mathcal{L}_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k+1)^{n-1}.$$

La demostración del resultado anterior es debida a Postnikov [2]. Es interesante agregar que aún no se conoce una prueba biyectiva de este hecho. Como se observó, diferentes propiedades del arreglo de Shi están directamente relacionadas con los árboles con $n + 1$ vértices numerados. Sería natural pensar en una biyección especial entre estos objetos, que conserve la mayor cantidad propiedades.

Es posible definir funciones de los árboles enumerados de 0 a n en los árboles alternantes con los mismos vértices. Una de tales funciones podría construirse tomando el árbol en el cual cada vértice distinto de 0 se une con el vértice con número más pequeño al cual es posible llegar mediante un camino decreciente (puede verse fácilmente que de esta forma se obtiene un árbol alternante). De esta forma, es posible agrupar algunos árboles, según su árbol alternante correspondiente.

Conjetura 5.8. *Existe una biyección entre los árboles y las regiones del arreglo de Shi, de forma que los árboles asociados a un mismo árbol alternante resultan en las mismas regiones del arreglo de Linial.*

Con esto resultaría una biyección entre las regiones de \mathcal{L}_n y los árboles alternantes, que además se comporta bien con respecto al arreglo de Shi y los árboles numerados. Es posible lograr diferentes biyecciones que demuestran el teorema 5.5, y dependiendo de la biyección se preservan ciertas propiedades (como en la biyección de Kreweras). Haría falta encontrar una biyección que de alguna forma preserve la asignación de los árboles alternantes hecha anteriormente.

5.3. Regiones en el Arreglo de Shi por Permutaciones

Uno de los objetivos de este trabajo es investigar nuevas propiedades interesantes, que permitan entender mejor la estructura detrás de los arreglos de hiperplanos. En particular, se quiso estudiar en el arreglo de Shi, cuántos hiperplanos se deben cruzar a partir de la región central para llegar a cada una de las demás regiones, diferenciando a los hiperplanos de la forma $x_i - x_j = 0$ (que se llamarán *hiperplanos de permutaciones*), de los de la forma $x_i - x_j = 1$. Se observa que el número de hiperplanos que se interponen entre la región base y una región cualquiera R es la suma de los términos de $\lambda(R)$, menos n . Faltaría distinguir cuántos de estos hiperplanos corresponden a hiperplanos de permutaciones.

Para trabajar este problema, la idea es mirar cuántas regiones quedan en cada una de las grandes regiones formadas por los hiperplanos de permutaciones, o lo que es lo mismo, cuántas regiones corresponden a cada permutación, y cómo son estas regiones. Para ver esto, se hará una analogía con lo trabajado en el arreglo de Catalan. Nótese que lo que ocurre en el arreglo de Catalan para cada sector $\nu(\omega)$ es exactamente lo mismo que ocurre en la región asociada a la permutación identidad en el arreglo de Shi. Se demuestra entonces que en este sector, el número de regiones está dado por el número de Catalan C_n .

Se está interesado en conocer el número de regiones en las que se subdivide el sector asociado $\nu(\omega)$ para cada permutación ω (esto podría definirse como el *número de Catalan generalizado* correspondiente a la permutación) y además saber cuántos hiperplanos deben cruzarse para llegar a cada una de estas regiones.

Los diferentes conjuntos contados por los números de Catalan muestran objetos que podrían ayudar en este estudio. Se observarán principalmente los tableros de $n \times n$ y caminos por debajo de la diagonal definidos en (2). La composición de las diferentes biyecciones que

se han construido forman una correspondencia entre las regiones del sector determinado por $\nu(\omega)$ y los caminos de (2). A continuación se describe más claramente esta biyección.

Proposición 5.9. *Para todo valor de $\omega \in S_n$, se puede relacionar cada camino de (2) con una región de \mathcal{C}_n contenida en $\nu(\omega)$, haciendo que cada uno de los pasos hacia la derecha en el camino represente a los diferentes $y_{\omega(i)}$ y cada paso hacia arriba represente a los $x_{\omega(i)}$ en el orden que ocurren en la lista de los x_i y los y_i , de mayor a menor.*

Ejemplo 5.3. Para cada valor de $\omega \in S_6$, el camino mostrado en la figura 2 se encuentra relacionado con la región del arreglo \mathcal{C}_n en la cual

$$y_{\omega(1)} > y_{\omega(2)} > y_{\omega(3)} > y_{\omega(4)} > x_{\omega(1)} > x_{\omega(2)} > y_{\omega(5)} > x_{\omega(3)} > x_{\omega(4)} > y_{\omega(6)} > x_{\omega(5)} > x_{\omega(6)}.$$

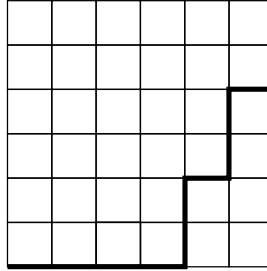


Figura 2: Camino relacionado a regiones de \mathcal{C}_n .

Para averiguar a qué región del arreglo de Shi pertenece la región asociada a este tablero (fijando el valor de ω), se observa que el hecho de pertenecer al sector $\nu(\omega)$ indica los hiperplanos de permutaciones que separan a la región de R_0 . Tan solo faltaría distinguir cuáles hiperplanos de la forma $x_i - x_j = 1$ se interponen entre la región y R_0 .

Estas parejas se encuentran representadas por cada una de las casillas del tablero. Si el camino pasa por encima de la casilla que se encuentra en la fila y columna de los pasos asociados a $y_{\omega(i)}$ y $x_{\omega(j)}$, quiere decir que se tiene la desigualdad $y_{\omega(i)} > x_{\omega(j)}$, mientras que en los otros casos no. Pero sólo interesan algunas de estas desigualdades; más exactamente aquellas en los pares $i < j$, con $\omega^{-1}(i) < \omega^{-1}(j)$, pues sólo éstas se relacionan con hiperplanos de la forma $x_i - x_j = 1$.

Definición 5.3. Los pares i, j que cumplen la condición anterior serán denominados *pares monótonos*, mientras que el resto de parejas se llamarán *inversiones*, con respecto a una permutación ω .

Proposición 5.10. *Especificando todas las inversiones o todos los pares monótonos de una permutación, queda determinada toda la permutación. De hecho, es posible reconstruir la permutación indicando para cada i entre 1 y n , cuántas inversiones i, j (con $i < j$) tiene la permutación.*

Para ver esto, suponga que se tiene una lista (d_1, d_2, \dots, d_n) donde d_i cuenta el número de pares $i < j$ que son inversiones, para una permutación ω . Es posible reconstruir la permutación a partir de la lista anterior, paso a paso, pues d_1 indica cuántos de los otros valores de $\omega^{-1}(i)$ van antes de $\omega^{-1}(1)$ para $i > 1$ (de donde $\omega^{-1}(1) = d_1 + 1$), luego d_2 indica cuantos de los valores siguientes van antes de $\omega^{-1}(2)$, y así sucesivamente.

Por la definición de la función λ , se puede encontrar que la región R en $\nu(\omega)$ que se encuentra junto al origen cumple que $\lambda(R) = (d_1 + 1, d_2 + 1, \dots, d_n + 1)$. Resulta ser que estas listas (a_1, a_2, \dots, a_n) son aquellas donde $a_i \leq n + 1 - i$. Se observa fácilmente que hay $n!$ listas de este tipo, una para cada valor de ω .

Ejemplo 5.4. Para la permutación $\omega_1 = 264153$ (donde $\omega_1(1) = 2, \omega_1(2) = 6$, etc.) se tiene que la lista que cuenta el número de inversiones es $(3, 0, 3, 1, 1, 0)$. La región R del arreglo de Shi adyacente al origen contenida en $\nu(\omega_1)$ será aquella tal que $\lambda(R) = (4, 1, 4, 2, 2, 1)$. Con el método descrito anteriormente, es posible reconstruir ω_1 a partir de estas listas.

Es posible marcar estas inversiones en el tablero, por debajo de la diagonal, obteniendo así algunas casillas seleccionadas como en la figura 3. Allí se tacharon las casillas que se encontraban en la fila i y la columna j , para cada inversión $i < j$, es decir, cuando $\omega(i) > \omega(j)$. Se marcaron las columnas y las filas (de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba) con los valores de ω , y se pintaron de gris las casillas en la diagonal principal.

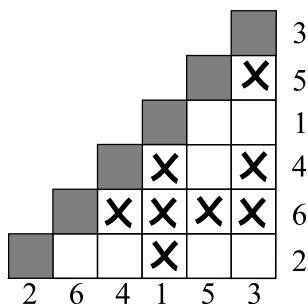


Figura 3: Tablero transitivo para ω_1 .

Proposición 5.11. *Los distintos tableros que pueden obtenerse mediante este procedimiento son aquellos que cumplen la siguiente propiedad: para cada grupo de cuatro casillas que formen un rectángulo (más exactamente, que se encuentren contenidas en un par de filas y columnas), si dos esquinas opuestas están en el mismo estado (es decir, ambas tachadas o ambas sin tachar) y otra de las esquinas es gris, entonces la cuarta esquina también se encuentra en el mismo estado de las otras dos esquinas.*

La propiedad anterior se observa más claramente mostrando las desigualdades que se plantean al marcar o no marcar un par de casillas y aplicando la propiedad transitiva. De esta forma, si $i < j$ y $j < k$ son pares monótonos, entonces $i < k$ también lo es, y análogamente en el caso en que ambos pares sean inversiones.

Definición 5.4. Los tableros que cumplen la condición dada en la proposición 5.11 serán denominados *tableros transitivos*.

Es fácil ver que todos los tableros transitivos están asociados a alguna permutación, pues puede observarse en la columna i , en cuantas inversiones $i < j$ se encuentra involucrado el término i y es posible encontrar la permutación relacionada. El hecho de que el tablero sea transitivo hace que no haya problemas al reconstruir la permutación, y que cada permutación se obtenga de un único tablero. Se concluye entonces que:

Proposición 5.12. *Hay en total $n!$ tableros transitivos.*

Construyendo el camino relativo a una región de \mathcal{C}_n en $\nu(\omega_1)$ en el tablero anterior, se encuentra que las casillas que representan las desigualdades relativas a los diferentes pares monótonos son aquellas que no están tachadas.

Para estar del otro lado de un hiperplano, se debe cumplir que $y_{\omega(i)} > x_{\omega(j)}$ para un par de valores i, j donde necesariamente $i < j$ (para que sea posible la desigualdad anterior). Además $\omega(i) < \omega(j)$ para que el hiperplano efectivamente esté en el arreglo de Shi. Por tal motivo, para cada permutación ω es necesario considerar todas estas parejas y seleccionar algunas de ellas de forma que efectivamente se determine una región. Pero por la forma en que se relacionaron los caminos y las regiones, se encuentra que las parejas anteriores son justamente los pares monótonos $i < j$ representados en el tablero por las casillas no marcadas. Tan sólo falta mirar si las casillas correspondientes se encuentra por debajo del camino trazado, para ver en cuáles casos se cumple que $y_{\omega(i)} > x_{\omega(j)}$ y en cuáles no.

Ejemplo 5.5. En la figura 4 se colocaron círculos en las casillas que representan los distintos hiperplanos que deben cruzarse al ir desde R_0 hasta la región R del arreglo de Shi en la cual se encuentra la región de \mathcal{C}_n representada por el camino. Nótese que las casillas marcadas determinan de manera única la región R , aunque puede haber distintos caminos que resulten relacionados con la misma región.

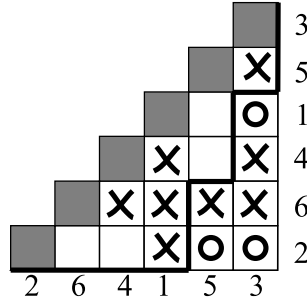


Figura 4: Tablero asociado a una región de \mathcal{S}_n .

Proposición 5.13. *Dado un tablero transitivo con casillas marcadas relativas a una región de \mathcal{S}_n , se puede obtener la función de parqueo relacionada observando las columnas, partiendo de la lista $(1, 1, \dots, 1)$ y sumando 1 al término en la coordenada $\omega(i)$ por cada casilla tachada o marcada en la columna i .*

Es fácil demostrar la proposición anterior, por la forma en que se definió λ .

Ejemplo 5.6. El tablero en la figura 4 está asociado a una región R del arreglo de Shi, tal que que $\lambda(R) = (4, 1, 6, 2, 3, 1)$.

Para saber cuántas regiones del arreglo de Shi se encuentran contenidas en el sector $\nu(\omega)$, basta con mirar las posibles elecciones de las casillas que representan pares monótonos, de forma que si una casilla es elegida, deben elegirse también todas las casillas que se encuentren más abajo o a la derecha (o ambas cosas). Esto es consecuencia de estar debajo del camino. Se mostrará que estas elecciones están relacionadas con el estudio de los conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 5.5. Un *conjunto parcialmente ordenado* (P, \leq) (en inglés conocido como *poset*) es un conjunto P junto con una relación de orden \leq , que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Por simplicidad, se adoptará la palabra inglesa. Si en cada tablero transitivo de una permutación $\omega \in S_n$ se define una relación de orden entre las casillas que representan pares monótonos, diciendo que una casilla es menor que otra si se encuentra más abajo o a la derecha, se encuentra que estas casillas forman un poset asociado a ω . Este poset permitirá identificar cada una de las regiones de \mathcal{S}_n contenidas en $\nu(\omega)$ con ciertos subconjuntos especiales del poset.

Ejemplo 5.7. El poset correspondiente a la permutación ω_1 mencionada anteriormente es isomorfo al que se muestra en la figura 5, donde los elementos son representados por los puntos, y un elemento es menor que otro si existe un camino siempre subiendo entre el menor y el mayor.

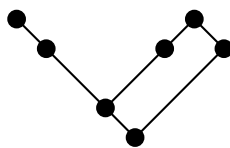


Figura 5: Poset del tablero transitivo para ω_1 .

Definición 5.6. Se definen los *ideales* de un poset como los subconjuntos I de elementos del poset tales que si $x \in I$ y $y \leq x$, entonces $y \in I$.

Es posible ahora enunciar el siguiente teorema.

Teorema 5.14. *Las regiones del arreglo de Shi contenidas en $\nu(\omega)$ están en biyección con los ideales del poset obtenido a partir del tablero transitivo correspondiente a ω .*

Mediante el teorema anterior, se encuentra que el problema de conocer el número de regiones en las que se subdivide el sector asociado $\nu(\omega)$ es equivalente a saber cuántos ideales tiene el poset asociado a la permutación. El conteo de los ideales de un poset problema abierto en combinatoria, pero se ha desarrollado una gran cantidad de investigación al respecto. En particular, se conoce que el conjunto de ideales de un poset, visto de nuevo como un poset ordenado por contención, tiene estructura de retículo distributivo. En realidad, se demuestra que todo retículo distributivo es isomorfo a un poset obtenido de esta manera. La definición de retículo distributivo y un estudio detallado de todas estas propiedades puede encontrarse en [3].

Esa propiedad le da una estructura interesante a las diferentes regiones que se encuentran en cada sector de permutaciones, y relaciona el problema considerado con muchos otros problemas acerca de posets e ideales, permitiendo usar otras herramientas relativas a estos otros temas. Como los posets obtenidos a partir de tableros transitivos son tan particulares, es posible que el problema de conteo en estos casos se simplifique. También sería interesante encontrar una interpretación sencilla de la propiedad de ser retículo distributivo, y de las otras propiedades que se deducen en estas estructuras (por ejemplo, mirar qué representan los diferentes ideales del retículo). La relación dada en el teorema 5.14 fue encontrada independientemente por R. Stanley [7].

6. Otros Resultados Enumerativos

En esta última sección se mostrarán algunos de los principales resultados y conexiones que existen en el tema de los arreglos de hiperplanos. En particular, se mencionarán algunas propiedades del polinomio característico asociado a un arreglo de hiperplanos, y el estudio de arreglos en campos finitos, en donde se incluyen varios de los más importantes teoremas relacionados con este tema. Con esto, se tratará de exponer otros métodos habituales en el estudio de arreglos de hiperplanos, y cómo esto se puede relacionar con otros muchos temas de formas interesantes e inesperadas.

6.1. Polinomio Característico $P(\mathcal{A})$

Antes de hablar del polinomio característico, es necesario mostrar algunas definiciones importantes relativas a los arreglos de hiperplanos.

Definición 6.1. Se define $L(\mathcal{A})$ como el conjunto de las diferentes intersecciones (no vacías) entre subconjuntos de los hiperplanos del arreglo, incluyendo a los mismos hiperplanos y al espacio completo (que es la intersección del subconjunto vacío).

Estas intersecciones forman conjuntos (de distintas dimensiones) que al ordenarse por contención forman un poset. Para coincidir con la notación habitual en el estudio de los posets, se dirá que $X \leq Y$ para cada par de elementos $X, Y \in L(\mathcal{A})$ tales que $Y \subseteq X$.

Definición 6.2. $L(\mathcal{A})$ junto con la relación de orden descrita anteriormente, se conoce como el *poset de intersecciones* del arreglo \mathcal{A} .

Ejemplo 6.1. Se considerará el arreglo de permutaciones para $n = 4$. Su poset de intersecciones se muestra en la figura 6.

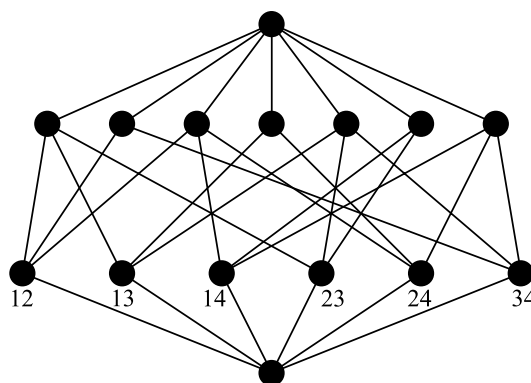


Figura 6: Poset de intersecciones de \mathcal{B}_4 .

Los puntos marcados con un par ij representan los hiperplanos H_{ij} dados por la fórmula $x_i - x_j = 0$. El punto inferior representa a todo el espacio \mathbb{R}^4 (que según el orden definido resulta ser el mínimo), mientras que los distintos puntos en el mismo nivel representan intersecciones de algunos hiperplanos con la misma dimensión. Una de ellas es, por ejemplo, la intersección de H_{12} , H_{13} y H_{23} , que es un conjunto de dimensión 2, generado por los vectores $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$.

Definición 6.3. Una función $\mu : L(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{N}$ se denomina *función de Möbius* de $L(\mathcal{A})$ si cumple que:

- I) $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$.
- II) $\sum_{Y \leq X} \mu(Y) = 0$, para todo $X \neq \mathbb{R}^n$.

Esta función es única para cada poset $L(\mathcal{A})$ y se puede construir paso a paso tomando $\mu(X) = -\sum_{Y < X} \mu(Y)$, siempre que se conozcan los valores $\mu(Y)$ involucrados. La función μ así definida tiene diversas propiedades enumerativas que generalizan diferentes resultados clásicos (como la fórmula de inversión de Möbius de la teoría de números, o la fórmula de inclusión-exclusión) al estudio de los posets.

Con todo esto, es posible ahora definir el polinomio característico.

Definición 6.4. El *polinomio característico* del arreglo \mathcal{A} se denota $\chi_{\mathcal{A}}$ y está dado por la fórmula

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X)t^{\dim(X)}.$$

Ejemplo 6.2. Siguiendo con el ejemplo anterior, en la figura 7 se encuentran los valores de la función μ en cada punto de $L(\mathcal{B}_4)$.

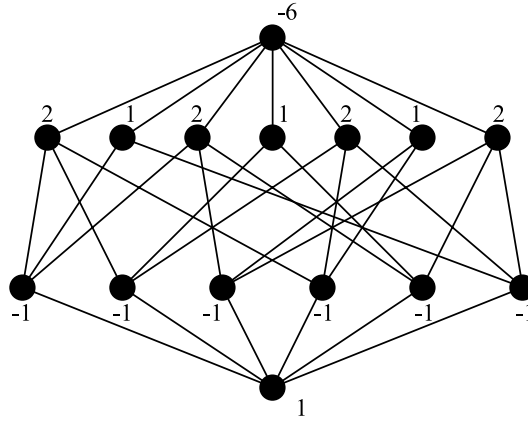


Figura 7: Función de Möbius de $L(\mathcal{B}_4)$.

Con estos valores, se observa que el polinomio característico en este caso resulta ser

$$\chi_{\mathcal{B}_4}(t) = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t.$$

El siguiente resultado es uno de los teoremas más importantes en el estudio de arreglos de hiperplanos:

Teorema 6.1 (Zaslavsky, 1975). *El número de regiones en el arreglo \mathcal{A} es exactamente $(-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$. El número de regiones acotadas (relativamente) es $(-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$.*

La demostración de este hecho se basa en las recurrencias que se logran seleccionando un hiperplano y observando lo que ocurre, sin el hiperplano y en el hiperplano (este método es conocido como *deletion-restriction method*). No se mostrará en detalle esta demostración, pero puede encontrarse en [5].

Ejemplo 6.3. Se puede verificar que $\chi_{\mathcal{B}_4}(-1) = 24$ y $\chi_{\mathcal{B}_4}(1) = 0$, como se esperaba.

6.2. Arreglos en Campos Finitos

El polinomio característico definido anteriormente tiene además otras propiedades enumerativas muy interesantes, especialmente al observar los arreglos de hiperplanos en campos finitos. Esto resulta bastante útil en el cómputo del polinomio característico de ciertos arreglos y permite nuevas e interesantes aplicaciones y demostraciones de resultados anteriores.

Al igual que se ha trabajado en \mathbb{R}^n , es posible desarrollar de forma análoga la idea de arreglos de hiperplanos en otros espacios vectoriales, en particular los de la forma F^n , donde F es un campo finito. En estos casos, algunas nociones como el número de regiones no se ven tan claras debido a que las topologías son esencialmente diferentes, pero ideas como el poset de intersecciones pueden aplicarse de la misma forma y permiten darle nuevas interpretaciones al polinomio característico.

En general, si se tiene un arreglo de hiperplanos con coeficientes racionales, es posible hacer una ampliación para que todos los coeficientes queden en los números enteros, y luego analizar el arreglo, pero ahora en F_p^n .

Teorema 6.2. *El número de puntos en F_p^n que no pertenecen al arreglo \mathcal{A} es exactamente $\chi_{\mathcal{A}}(p)$ para casi todo valor de p .*

Demostración. Se observa que cada intersección de hiperplanos $Y \in L(\mathcal{A})$ de dimensión k tiene en total p^k elementos. Así, en la definición de $\chi_{\mathcal{A}}$, cada término $\mu(Y)p^k$ está contando el número de elementos en Y multiplicado por $\mu(Y)$. Se encuentra que cada punto de F_p^n contenido en alguno de los hiperplanos se contó en total $\sum_{Y \leq X} \mu(Y) = 0$ veces, donde X es la intersección de todos los hiperplanos en los que se encuentra el punto. En cambio, todos los puntos que no pertenecen a ningún hiperplano del arreglo \mathcal{A} se contaron tan solo una vez, en el término p^n correspondiente a la intersección vacía, es decir, cuando $X = F_p^n$. Por lo tanto, al evaluar $\chi_{\mathcal{A}}(p)$ se cuenta la cantidad de puntos que no pertenecen a ningún hiperplano. Para que el análisis anterior sea válido, la única condición que debe cumplir p es que el poset de intersecciones visto en F_p^n sea isomorfo a $L(\mathcal{A})$ visto en \mathbb{R}^n . Esto se cumple para casi todo valor de p . \square

El resultado anterior es consecuencia directa de la *fórmula de inversión de Möbius*, que es una generalización para todo tipo de posets de la fórmula de inclusión exclusión. Estas cuentas pueden ayudar a conocer el polinomio característico del arreglo \mathcal{A} , pues en muchos casos es fácil resolver el problema de conteo de puntos en términos de p , mediante muchas otras formas, dependiendo del arreglo.

Ejemplo 6.4. En el ejemplo del arreglo \mathcal{B}_4 , es fácil ver que en F_p^n , el número de puntos que no pertenece a ningún hiperplano está dado por

$$p(p-1)(p-2)(p-3) = \chi_{\mathcal{B}_4}(p).$$

Un ejemplo más interesante es el estudio del polinomio característico del arreglo de Catalan \mathcal{C}_n . Se encuentra el siguiente resultado.

Proposición 6.3. *El polinomio característico del arreglo de Catalan es*

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(t) = t(t-n-1)(t-n-2)(t-n-3) \cdots (t-2n+1).$$

Demostración. Para calcular el polinomio característico de \mathcal{C}_n se usará el resultado del teorema 6.2. Suponga que p es un primo suficientemente grande. Se debe encontrar el número de formas de seleccionar n valores (x_1, x_2, \dots, x_n) en F_p , de forma que no haya dos repetidos ni dos consecutivos. Para el valor de x_n hay p posibilidades. Ahora para escoger el conjunto de valores que pueden tomar las otras coordenadas x_i , se encuentra que hay en total $\binom{p-n-1}{n-1}$ posibilidades, ya que si se escogen $n-1$ valores $z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1}$ entre 1 y $p-n-1$, se puede determinar de forma única una elección de $n-1$ de los elementos restantes de F_p sin repetir ni incluir términos repetidos tomando los x_i del conjunto $\{x_n + z_i + i : 1 \leq i \leq n-1\}$ en cualquier orden.

Se concluye entonces que el número de puntos de F_p^n que no están en ninguno de los hiperplanos de \mathcal{C}_n es en total

$$p \binom{p-n-1}{n-1} (n-1)! = p(p-n-1)(p-n-2)(p-n-3) \cdots (p-2n+1),$$

y de aquí el resultado se sigue. \square

La proposición 4.1 resulta ser un simple corolario del resultado anterior, junto con 4.3 y 6.2, viendo que

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(-1) = (-1)^n (n+2)(n+3) \cdots (2n) = (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

El teorema 4.4 también puede deducirse a partir de aquí, pero no cabe duda que de esta forma se pierden muchas de las relaciones que aparecen en la demostración expuesta anteriormente. Mediante este mismo método, también puede encontrarse que:

Proposición 6.4. *El polinomio característico para \mathcal{S}_n es $\chi_{\mathcal{S}_n}(t) = t(t-n)^{n-1}$.*

La prueba de este resultado puede consultarse en [5]. A partir de la proposición anterior se obtiene una demostración de los teoremas 5.3 y 5.4, gracias al teorema 6.1.

6.3. Arreglos de Grafos

Una pregunta clásica de la teoría de grafos se refiere al número de coloraciones posibles de los vértices de un grafo simple G con t colores, de tal forma que cada par de vértices adyacentes no pueden ser del mismo color (un grafo simple es aquel que no tiene bucles ni arcos dobles). Se puede demostrar que para todo grafo simple G , el número de coloraciones con t colores está dado por un polinomio $\chi_G(t)$ de grado n , conocido como el *polinomio cromático* del grafo.

Algunas propiedades de estos polinomios se pueden encontrar en [5]. Si se define para todo grafo G con n vértices (numerados del 1 al n) el arreglo de hiperplanos \mathcal{A}_G en n dimensiones, con los hiperplanos de la forma $x_i - x_j = 0$ para todo par de vértices i, j que estén unidos por un arco, resulta que:

Teorema 6.5. *Para todo grafo G se cumple que $\chi_G(t) = \chi_{\mathcal{A}_G}(t)$.*

Demostración. Considerando el arreglo \mathcal{A}_G en F_p^n , se encuentra que cada posible coloración con p colores se encuentra representada por un punto de F_p^n que no esté en ninguno de los hiperplanos. Por lo tanto, se cumple que $\chi_G(p) = \chi_{\mathcal{A}_G}(p)$. Como esto es cierto para casi todo

primo, los polinomios deben ser iguales. De hecho, repitiendo el análisis de la demostración del teorema 6.2, se puede demostrar que el número de coloraciones posibles con t colores está dado por $\chi_{\mathcal{A}_G}(t)$ para todo t , mostrando de esa forma que el conteo de coloraciones es siempre un polinomio (en estos sencillos arreglos, no hay problema al considerar el arreglo en el grupo cíclico \mathbb{Z}_t para valores de t que no son primos). \square

Es posible estudiar con más detalle los diversos objetos vistos, junto con muchos otros que van apareciendo poco a poco al pasar por los diversos arreglos de hiperplanos. De hecho, existe una vasta literatura al respecto, llena de curiosidades y objetos combinatorios de todo tipo. Además, allí se encuentran demostraciones usando todo tipo de herramientas, desde las más básicas hasta algunas muy sofisticadas, que provienen de diversos campos de la matemática y que se entretajan en formas muy cercanas e insospechadas.

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a las personas que con su apoyo y valiosos comentarios permitieron sacar este trabajo adelante. Principalmente a Federico Ardila y Humberto Sarria (profesores colaboradores), a Carolina Benedetti y a Edgard Felipe Rincón. También quiero agradecer a la Universidad Nacional de Colombia y a las Olimpiadas de Matemáticas, por servirme de guía en este camino lleno de alegrías y satisfacciones.

Referencias

- [1] G. Kreweras, *Une famille de polynômes ayant plusieurs propriétés énumératives*, Periodica Mathematica Hungarica Vol 11(4), 1980.
- [2] A. Postnikov and R. Stanley, *Deformation of Coxeter Hyperplane Arrangements* Massachusetts Institute of technology, Cambridge, MA 02139, 1997.
- [3] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol 1*. Wadsworth & Brooks Cole, Belmont, CA, 1986.
- [4] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol 2*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [5] R. Stanley, *An Introduction to Hyperplane Arrangements*. IAS/ Park City Mathematics Series, 2005.
- [6] R. Stanley, *Hiperplane arrangements, parking functions and tree inversions*, Dedicated to Gian-Carlo Rota on the occasion of his sixty-fourth birthday, 1996.
- [7] R. Stanley, *Hiperplane arrangements, interval orders and trees*, Massachusetts Institute of technology, Cambridge, version of 1 December 1995.