Seminario Geometría discreta: Teoría de Ehrhart

Ejercicios propuestos

1 Capítulo 1

1. Entender el Teorema 1.5 (Popovicius) que dice que el número de formas de sumar n con monedas de a y b es
$$p_{a,b}(n) = \frac{n}{ab} - \left\{\frac{b^{-1}n}{a}\right\} - \left\{\frac{a^{-1}n}{b}\right\} + 1$$
donde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, $bb^{-1} \equiv 1 \pmod{a}$ y $aa^{-1} \equiv 1 \pmod{b}$.

   Para esto hay dos posibilidades. La primera es tratar de verlo directamente, el caso de dos monedas no es tan complicado. La segunda posibilidad es seguir los pasos del libro y los ejercicios propuestos correspondientes (al final de la Sección 1.3, y los ejercicios 1.3 y 1.22). El método del libro usando fracciones parciales permite encontrar otras fórmulas par los casos de mas de dos monedas, como por ejemplo las fórmulas de $p_{\{a,b,c\}}(n)$ y $p_{\{a,b,c\}}(n)$ que se encuentran al final del Capítulo 1 (pag. 15).

2. Entender las demostraciones de los teoremas 1.2 y 1.3 usando el Teorema 1.5 (esto se puede encontrar en la Sección 1.4).

2 Capítulo 2

1. Si definimos los números $A(d,k)$ mediante la relación
$$\sum_{j\geq 0} j^d z^j = \sum_{i=0}^{d} \frac{A(d,k)z^k}{(1-z)^{d+1}},$$
demostrar que:

   (a) El polinomio $\sum_{i=0}^{d} A(d,k)z^k$ es el numerador de
$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^d \left(\frac{1}{1-z}\right)$$
(y por lo tanto tiene sentido la definición).

   (b) Investigar otras propiedades de los números eulerianos $A(d,k)$.

2. Revisar la demostración del Lemma 2.3 sobre los polinomios de Bernoulli.

3. Ver la Sección 2.5, en donde se calculan los polinomios de Ehrhart de los cross-politopos (octahedros generalizados).